σ Journal of Engineering and Natural Sciences
Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi

Sigma
Vol./Cilt 26
Issue/Sayı 2

Invited Review Paper / Çağrılı Derleme Makalesi

ON RADICALS OF SUBMODULES

Fethi ÇALLIALP*

Doğuş Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Acıbadem, Kadıköy-İSTANBUL

Geliş/Received: 14.05.2008

ABSTRACT

Let R be an associative ring with identity and M be a left R-module unitary. The M-radical of a submodule N in a R-module M, **rad(N)** is defined as the intersection of all prime submodules containing N. Various basic properties of M-radicals are discussed in multiplication modules. We determine the elemens of rad(N).
Keywords: Prime submodules, radicals, radical formula.
MSC number/numarası: 05C38, 15A15.

ALT MODÜLLERİN RADİKALLERİ ÜZERİNE

ÖZET

R bir asosyatif ve birimli bir halka ve M bir sol R-modül olsun. N , M nin has alt modülü olsun. N yi içeren bütün asal alt modüllerin kesişimine N alt modülünün M - radikali denir. N alt modülünün M -radikalini $rad(N)$ ile göstereceğiz. Bu makalede $rad(N)$ yi elemanlarla belirtmeye çalışacagız.
Anahtar Sözcükler: Asal alt modüller, radikaller, radikal formülü.

1. DEĞİŞMELİ HALKALAR ÜZERİNDEKİ MODÜLLERİN ALT MODÜLLERİNİN RADİKALLERİ

Bu bölüm boyunca bütün halkalar değişmeli ve birimli, modüller birimsel R -modüldür. N , R -modül M nin bir alt modülü olmak üzere $(N:M) = Ann\left(M/N\right)$ ile R nin $\{\ r \in R:\ rM \subset N\}$ idealini ifade edeceğiz.

Tanım 1.1. N , R -modül M nin has alt modülü olsun. Her $r \in R$ ve her $m \in M$ için $rm \in N$ olması $m \in N$ veya $r \in (N:M)$ olmasını gerektiriyorsa N ye R -modül M nin bir **asal alt modülü** denir.

* e-mail / e-ileti:fcallialp@dogus.edu.tr, tel: (216) 327 11 04 # 11 22

Lemma 1.2. N, R-modül M nin asal alt modülü olması için gerek ve yeter şart $(N:M)$ nin R halkasının asal ideali olması ve M/N nin torsion-free $R/(N:M)$-modül olmasıdır.

Asal alt modülleri örneklerle inceleyelim.

Örnek 1. R halkasının her asal ideali R-modül R nin bir asal alt modülüdür.

Örnek 2. R bir tamlık bölgesi ve $T(M)$, R-modül M nin has torsion alt modülü olsun. Bu halde $T(M)$, R-modül M nin asal alt modülüdür. Gerçekten, $0 \neq r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $rm \in T(M)$ olsun. Bu halde $trm = 0$ olacak şekilde $0 \neq t \in R$ vardır. R tamlık bölgesi olduğundan $m \in T(M)$ olduğu görülür.

Lemma 1.2. den N, R-modül M nin asal alt modülü ise $(N:M)$, R nin asal idealidir. Fakat $(N:M)$, R nin asal ideali ise N nin R-modül M nin asal alt modülü olduğunu genel olarak söyleyemeyiz. $(N:M)$, R halkasının asal ideali iken N nin R-modül M nin asal alt modülü olduğu özel durumları inceleyelim.

N, R-modül M nin has alt modülü olsun. Her $r \in R$ ve her $m \in M$ için $rm \in N$, $m \notin N$ olması bir n pozitif tamsayısı için $r^n \in (N:M)$ olmasını gerektiriyorsa N ye **asalımsı alt modül** denir.

Lemma 1.3. N, R-modül M nin asalımsı alt modülü olsun. Bu halde N nin asal alt modül olması için gerek ve yeter şart $(N:M)$ nin R nin asal ideali olmasıdır.

Tanım 1.4. M bir R-modül olsun. M nin her N alt modülü I, R halkasının bir ideali olmak üzere $N = IM$ şeklinde ifade edilebiliyorsa M ye **çarpımsal modül** denir.

M bir çarpımsal R-modül ve N, M nin alt modülü olmak üzere $(N:M)$, R nin asal ideali iken N nin R-modül M nin asal alt modülü olduğunu gösterelim. İlk olarak şu lemmayı inceleyelim.

Lemma 1.5. M bir R-modül ve N, M nin has alt modülü olsun. N nin asal alt modül olması için gerek ve yeter şart I, R nin bir ideali ve D, M nin bir alt modülü olmak üzere $ID \subset N$ olması $I \subset (N:M)$ veya $D \subset N$ olmasını gerektirmesidir.

Lemma 1.6. M çarpımsal R-modül olsun. Bu halde, N nin asal alt modül olması için gerek ve yeter şart $(N:M)$ nin R nin asal ideali olmasıdır.

Önerme 1.9. M bir R-modül ve N, M nin has alt modülü olsun. Eğer N, M nin bir maksimal alt modülü ise asaldır.

İspat. N, M nin maksimal alt modülü olsun. $r \in R, m \in M$ olmak üzere $rm \in N$ ve $m \notin N$ olduğunu kabul edelim. Bu halde $N + Rm = M$ ve böylece $rM = rN + Rrm \subset N$ dir. Bu ise N nin asal alt modül olduğunu belirtir.

Sonuç. M sonlu üretilmiş R-modül olsun. Bu halde, M nin her has alt modülü bir asal alt modülde içerilir.

Tanım 1.11. M bir R-modül ve N, M nin has alt modülü olsun. Eğer bir P asal alt modülü için $N \subset P$ ve P bu özellikte en küçük asal alt modül ise, P ye N alt modülünün **minimal asal alt modülü** denir. (0) alt modülünün minimal asal alt modülü, M nin minimal asal alt modülüdür.

Önerme 1.12. M bir R-modül ve N, M nin alt modülü olsun. Eğer N alt modülü M nin P asal alt modülünde içerilirse, N nin minimal asal alt modülü P de içerilir.
Sonuç. M sonlu üretilmiş R-modül olsun. M nin her has alt modülü en az bir minimal asal alt modül içerir.

Tanım 1.13. M bir R-modül ve N, M nin has alt modülü olsun. N yi içeren bütün asal alt modüllerin kesişimine N alt modülünün M - **radikali** denir. N alt modülünün M - radikalini $rad(N)$ ile göstereceğiz. Özel olarak,, $rad(0)$ ye de M nin **asal radikali** denir ve bütün asal alt modüllerin kesişimidir.

Teorem 1.14. M sonlu üretilmiş R-modül ve N, M nin has alt modülü olsun. N nin M - radikali, N nin minimal asal alt modüllerinin kesişimidir.

Önerme 1.15. N ve L, R-modül M nin alt modülleri olsunlar. Bu halde

(1) $N \subset rad(N)$
(2) $rad(N \cap L) \subset rad(N) \cap rad(L)$
(3) M çarpımsal R-modül olmak üzere $rad(N \cap L) = rad(N) \cap rad(L)$
(4) I, R halkasının bir ideali olmak üzere $rad(IM) = rad(\sqrt{I}M)$ dır.
(5) I, R nin bir ideali olmak üzere $rad(I^n M) = rad(IM)$ dir.

İspat. **(1)** ve **(2)** doğru olduğu açıkça görülür.
(3) $rad(N \cap L) = M$ eşitliği var ise $rad(N) = rad(L) = M$ ve böylece $rad(N \cap L) = rad(N) \cap rad(L)$ olduğu görülür. Şimdi,

$rad(N \cap L) \neq M$ olduğunu kabul edelim. Bu halde $N \cap L \subset P$ olacak şekilde bir P asal alt modülü vardır. $N \cap L \subset P$ olması $(N:M) \cap (L:M) \subset (P:M)$ olmasını gerektirir. $(P:M)$ asal ideal olduğundan dolayı $(N:M) \subset (P:M)$ veya $(L:M) \subset (P:M)$ olmasını gerektirir. M nin çarpımsal modül olduğunu kabülümüzden biliyoruz. Bu halde, $N = (N:M)M \subset (P:M)M = P$ veya $L = (L:M)M \subset (P:M)M = P$ olduğu görülür. Böylece $rad(N) \cap rad(L) \subset rad(N \cap L)$ dir. (2) den $rad(N \cap L) = rad(N) \cap rad(L)$ sonucunu elde ederiz.

(4) $rad(IM) \subset rad(\sqrt{I}M)$ dir. $rad(IM) = M$ ise $rad(IM) = rad(\sqrt{I}M)$ olduğu açıkça görülebilir. Bu halde $rad(IM) \neq M$ olduğunu kabul edelim. Böylece IM yi içeren p-asal P alt modülü vardır ve $I \subset (IM:M) \subset (P:M) = p$ dir. Bundan dolayı, $\sqrt{I} \subset p$ ve böylece $\sqrt{I}M \subset pM \subset P$ dir. IM yi içeren her P asal alt modülü için $rad(\sqrt{I}M) \subset P$ dir. $rad(\sqrt{I}M) \subset rad(IM)$ ve $rad(\sqrt{I}M) = rad(IM)$ dir.

(5) $\sqrt{I^n} = \sqrt{I}$ olduğundan $rad(I^n M) = rad(\sqrt{I^n}M) = rad(\sqrt{I}M) = rad(IM)$ eşitliği vardır.

Genel olarak bir R-modül M nin radikalini elemanlarla belirtmek zordur. Bu konuyla ilgili birçok çalışma vardır. Bu çalışmalardan elde edilen iki sonucu verelim.

Teorem 1.16. M sonlu üretilmiş, çarpımsal R-modül ve N, M nin has alt modülü olsun. Bu halde $rad(N) = \sqrt{(N:M)}M$ dir.

Teorem 1.17. R bir Dedekind bölgesi ve M bir R-modül olsun. Bu halde
$rad(M) = \{ m = r_1 m_1 + r_2 m_2 + ... + r_n m_n \ : \ r_i \in R, \ m_i \in M$ ve $r_i^k m_i = 0 \ (1 \leq i \leq n) \}$ dir.

2. DEĞİŞMELİ OLMAYAN HALKALAR ÜZERİNDEKİ MODÜLLERİN, ALT MODÜLLERİNİN RADİKALİ

Tanım 2.1. M sol R-modül ve N, M nin has alt modülü olsun. Her $r \in R$ ve $m \in M$ için $rRm \subset N$ olması $m \in N$ veya $r \in (N:M)$ olmasını gerektiriyorsa N ye M nin **asal** alt modülü denir.

Önerme 2.2. M bir sol R -modül ve N , M nin has alt modülü olsun. Bu halde N nin asal alt modül olması için gerek ve yeter şart N yi has olarak içeren M nin her K alt modülü için $(N:K)=(N:M)$ olmasıdır.

Tanım 2.3. R bir halka ve M bir sol R -modül olsun. Herhangi $m \in M$ için, $Ann(m)=\{ r \in R : rm = 0\}$ sol idealine m elemanının **annihilatörü** denir. Ayrıca, $Ann(M)=\{ r \in R : rM = 0\}$ idealine M **nin annihilatörü** denir. Eğer $Ann(M)=0$ ise M ye **faithful** denir.

Tanım 2.4. Sol R -modül M ye her sıfırdan farklı alt modülü faithful ise **fully faithful** denir.

Teorem 2.5. M bir sol R -modül ve N , M nin has alt modülü olsun. N nin asal alt modül olması için gerek ve yeter şart $(N:M)=P$ nin R halkasının bir asal ideali olması ve sol R/P - modül M/N nin fully faithful olmasıdır.

N, M nin has alt modülü olsun. N nin radikalini N de içerilen tüm asal alt modüllerin kesişimi olarak tanımlayacağız ve $rad(N)$ ile göstereceğiz. Bu bölümde kalıtsal halkalar üzerindeki modüllerin radikalini elemanlarla belirtmeye çalışacağız.

Tanım 2.6. R bir halka ve M bir sol R -modül olsun. Bununla beraber $r_i \in R$ ve $m_1 \in M$ $(i=1,2,3,...)$ olsun. Eğer $r_{i+1}m_1 \in r_iRr_im_1$, $r_{i+1} \in r_iRr_i$ $(i=1,2,3,...)$ olacak şekilde her $r_1m_1, r_2m_1, r_3m_1,...$ dizisi sıfırla bitiyorsa M nin r_1m_1 elemanına **kuvvetli nilpotent** denir. $W(M)$ ile sol R -modül M nin kuvvetli nilpotent elemanları tarafından üretilen alt modülünü göstereceğiz.

Lemma 2.7. R bir halka ve M bir sol R -modül olsun. Bu halde $W(M) \subset rad(M)$ dir.

İspat. $r_1 \in R$ ve $m_1 \in M$ olmak üzere $r_1m_1 \notin rad(M)$ olduğunu kabul edelim. Bu halde, r_1m_1 nin kuvvetli nilpotent olmadığını göstermek yeterlidir. $r_1m_1 \notin rad(M)$ olduğundan dolayı $r_1m_1 \notin N$ olacak şekilde N asal alt modülü vardır. N asal altmodül olduğu için $r_1Rr_1m_1 \not\subset N$ ve böylece $r_2m_1 \notin N$ olacak şekilde $r_2m_1 \in r_1Rr_1m_1$ elemanı vardır. Benzer şekilde N asal alt modül olduğundan dolayı $r_2Rr_2m_1 \not\subset N$ ve böylece $r_3m_1 \notin N$ olacak şekilde $r_3m_1 \in r_2Rr_2m_1$ elemanı vardır. Bu halde $r_{i+1} \in r_iRr_i$ ve $r_{i+1}m_1 \in r_iRr_im_1$ $(i=1,2,3,...)$ olacak şekilde $r_1m_1, r_2m_1, r_3m_1,...$ dizisi vardır ve sıfırla sonuçlanmaz. Bu ise r_1m_1 nin kuvvetli nilpotent olmadığını gösterir.

Lemma 2.8. R bir halka ve M bir $m \in M$ için $M = Rm$ olacak şekilde devresel R-modül olsun. Ayrıca P, R halkasının bir asal ideali ve $Ann(m) \subset P$ olsun. Bu halde Pm, M nin asal alt modülüdür ve $P = (Pm : M)$ dir.

İspat. $e \in M$ ve $r \in R$ olsun. Bunula beraber bir $s \in R$ için $e = sm$ olmak üzere $r\mathrm{Re} \subset Pm$ olsun. Bu halde $rRsm \subset Pm$ dir. $Ann(m) \subset P$ olduğu için $rRs \subset P$ ve böylece $r \in P$ veya $s \in P$ dir. Bu ise $rM = rRm \subset Pm$ veya $e = sm \in Pm$ olmasını gerektirir. Böylece Pm asal alt modüldür.

$P \subset (Pm : M)$ olduğunu görmek kolaydır. İspatı tamamlamak için $(Pm : M) \subset P$ olduğunu gösterelim. Bunun için $r \in (Pm : M)$ olduğunu kabul edelim. Bu halde $rRm \subset Pm$ dir. $Ann(m) \subset P$ olduğundan dolayı $rR \subset P$ ve böylece $r \in P$ dir.

Teorem 2.9. R bir halka ve M bir $m_1 \in M$ için $M = Rm_1$ olacak şekilde devresel R-modül olsun. Bununla beraber $Ann(m_1) \subset rad(R)$ olsun. Bu halde $rad(M) = W(M)$ dir.

İspat. Lemma 4.2 vasıtasıyla $W(M) \subset rad(M)$ olduğunu biliyoruz. Bu halde $rad(M) \subset W(M)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $P_i(i \in I)$ lar R nin asal idealleri ve $P_i m_1$ alt modülleri M nin asal altmodülleri olmak üzere $rad(M) \subset \bigcap_{i \in I}(P_i m_1) = (\bigcap_{i \in I} P_i)\, m_1 = rad(R)m_1$ olduğu görülür. $rad(R)$, R halkasının kuvvetli nilpotent elemanlarından oluştuğu için, $rad(R)m_1$ her elemanı kuvvetli nilpotenttir. Bu halde $rad(R)m_1 \subset W(M)$ ve böylece $rad(M) \subset W(M)$ dir.

Önerme 2.10. R bir halka ve M bir sol R- modül olsun. Eğer N, M nin altmodülü ise $W(N) \subset W(M)$ dir.

İspat. İspat açıktır.

Lemma 2.11. R bir halka ve M bir sol R-modül olsun. Bu halde $rad(N) \subset rad(M)$ dir.

İspat. P, sol R-modül M nin asal alt modülü olsun. $N \subset P$ ise $rad(N) \subset P$ dir. Bu halde $N \not\subset P$ olduğunu kabul edelim. Böylece $N \cap P$ alt modülü N nin asal alt modülü olur. Gerçekten, $r \in R, n \in N$ olmak üzere $rRn \subset N \cap P$ ve $r \notin (N \cap P : N) = (P : N)$ olduğunu kabul edelim. Bu halde P asal alt modül olduğu için

$n \in P$ ve böylece $n \in N \cap P$ dir. Bu ise $rad(N) \subset N \cap P \subset P$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $rad(N) \subset rad(M)$ olduğunu görebiliriz.

Lemma 2.12. R bir halka ve M , N_i ($i \in I$) lar alt modül olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ direk toplamı olsun. Bu halde $rad(M) = \bigoplus_{i \in I} rad(N_i)$ dir.

İspat. Lemma 2.11 vasıtasıyla her $i \in I$ için $rad(N_i) \subset rad(M)$ dir. Bu halde $\bigoplus_{i \in I} rad(N_i) \subset rad(M)$ olduğu görülür. $m \in M$ olmak üzere $m = \sum_{i \in I} m_i \notin \bigoplus_{i \in I} rad(N_i)$ olduğunu kabul edelim. Bu bize $m_k \notin rad(N_k)$ olacak şekilde $k \in I$ olduğunu belirtir. Bu halde N_k^*, N_k nın asal alt modülü olmak üzere $m_k \notin N_k^*$ olduğunu görürüz. Şimdi $K = N_k^* \oplus \left(\bigoplus_{i \neq k} N_i \right)$ olduğunu kabul edelim. Bu halde K asal alt modüldür. Gerçekten, $r \in R$ ve $s = \sum_{i \in I} s_i \in M$ olmak üzere $rRs \subset K$ olsun. Bu halde $rRs_k \subset N_k^*$ dır. N_k^* altmodülü N_k nın asal alt modülü olduğundan $s_k \in N_k^*$ veya $rN_k \subset N_k^*$ olduğunu ve böylece $s \in K$ veya $rM \subset K$ olduğunu söyleyebiliriz. Bununla beraber $m \notin K$ olduğundan dolayı, $m \notin rad(M)$ dir. Sonuç olarak $rad(M) = \bigoplus_{i \in I} rad(N_i)$ dir.

Lemma 2.13. R bir halka ve M , $rad(M) = W(M)$ olacak şekilde bir sol R -modül olsun. Bu halde M nin direk toplamındaki herbir N alt modülü için $rad(N) = W(N)$ dir.

İspat. Sol R modül M nin bir K alt modülü için $M = N \oplus K$ olduğunu varsayalım. Lemma 4.2 vasıtasıyla $W(N) \subset rad(N)$ olduğunu biliyoruz. İspatı tamamlamak için $rad(N) \subset W(N)$ olduğunu ispatlıyalım. Bunun için $m \in rad(N)$ olduğunu kabul edelim. Bu halde lemma 4.6 vasıtasıyla $m \in rad(M)$ dir. Varsayımımızdan dolayı $i \in \{ 1,2,3,...,n \}$ ve $x_i \in N, y_i \in K$, $r_i m_i = r_i x_i + r_i y_i$, $a_1, a_2, ..., a_n \in R$ olmak üzere $m = a_1 r_1 m_1 + a_2 r_2 m_2 + ... + a_n r_n m_n$ dir. Bu toplamda her $i \in \{1,2,3,...,n\}$ için $r_i m_i$ elemanlarının kuvvetli nilpotent olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı, $m = a_1 r_1 x_1 + a_2 r_2 x_2 + ... + a_n r_n x_n + a_1 r_1 y_1 + a_2 r_2 y_2 + ... + a_n r_n y_n$ eşitliği elde edilmiş olur ve böylece

$m-\left(a_1r_1x_1+a_2r_2x_2+...+a_nr_nx_n\right)=a_1r_1y_1+a_2r_2y_2+...+a_nr_ny_n\in N$ sonucunu elde ederiz. Bu halde, $m=a_1r_1x_1+a_2r_2x_2+...+a_nr_nx_n$ ve böylece $m\in W(N)$ dir.

Lemma 2.14. R bir halka ve M, projektif R-modül olsun. Ayrıca her $m\in M$ için $Ann(m)\subset rad(R)$ olduğunu kabul edelim. Bu halde $rad(M)=W(M)$ dir.

İspat. Bir serbest F modülü için, M projektif modülü bu F modülünün direk toplamında bulunacak şekilde varlığını biliyoruz. $F_i(i\in I)$ alt modülleri devresel alt modüller olmak üzere $F=\bigoplus_{i\in I}F_i$ eşitliği vardır. Lemma 2.12 den $rad(F)=\bigoplus_{i\in I}rad(F_i)$ eşitliği vardır. Fakat her $i\in I$ için $rad(F_i)=W(F_i)\subset W(F)$ olduğundan $rad(F)\subset W(F)$ dir. Bundan dolayı $rad(F)=W(F)$ dir. Lemma 2.13 vasıtasıyla $rad(M)=W(M)$ eşitliği vardır.

Tanım 2.15. Bir R halkasında tüm sağ ve sol idealler projektif R-modül ise R ye **kalıtsal halka** denir. R halkası sağ ve sol Noetherian ise kısaca **Noetherian** olarak adlandıralacaktır. Bir R halkası kalıtsal, Noetherian, sağ Artinian değil ve asal ise R halkasını KNA**-halkası** olarak adlandıracağız.

Teorem 2.16. R bir KNA-halkası ve M sonlu üretilmiş R-modül olsun. Bununla beraber her $m\in M$ için $Ann(m)\subset rad(R)$ olsun. Bu halde $rad(M)=W(M)$ dir.

İspat. $W(M)\subset rad(M)$ olduğunu biliyoruz. $M_i(i\in I)$ lar projektif veya devresel modüller olmak üzere $M=\bigoplus_{i\in I}M_i$ dir. Bu halde $rad(M)=\bigoplus_{i\in I}rad(M_i)=\bigoplus_{i\in I}W(M_i)\subset W(M)$ dir. Sonuç olarak $rad(M)=W(M)$ dir.

Lemma 2.17. R bir halka, M ve S sol R-modüller olsunlar. Ayrıca $f:M\to S$ çekirdeği K olan örten homomorfizma olsun. Bu halde M nin K yı içeren asal alt modülleriyle S nin asal alt modülleri arasında bire bir eşleme vardır.

İspat. N, M nin çekirdek K yı içeren asal alt modülü olsun. $r\in R$ ve $m\in M$ olmak üzere $rRf(m)\subset f(N)$ fakat $f(m)\notin f(N)$ olsun. f (N) nin asal alt modül olduğunu göstermek için $rS\subset f(N)$ kapsamının gerçeklendiğini göstermek yeterlidir. $f(rRm)\subset f(N)$ olduğundan dolayı, $rRm-N\subset K$ ve böylece $rRm\subset K+N=N$ ve $m\notin N$ dir. N asal alt modül olduğundan dolayı $rM\subset N$ dir. Bu halde $rS=rf(M)=f(rM)\subset f(N)$ dir.

Tersine L sol R-modül S nin asal alt modülü olsun. Bununla beraber, $t\in M$ ve $r\in R$ olmak üzere $rRt\subset f^{-1}(L)$ ve $t\notin f^{-1}(L)$ olsun. Bu halde

$f(rRt) \subset f(f^{-1}(L)) \subset L$ ve böylece $rRf(t) \subset L$ dir. L asal alt modül ve $f(t) \notin L$ olduğundan $rS \subset L$ ve böylece $rf(M) \subset L$ dir. Bu ise $rM \subset f^{-1}(f(rM)) \subset f^{-1}(L)$ olmasını gerektirir.

Tanım 2.18. R bir halka ve M bir sol R-modül olsun. Eğer M nin her N alt modülü için rad(M/N)=W(M/N) ise M ye **radikal formülü sağlıyor** denir.

Tanım 2.19. R bir halka, M bir sol R-modül ve N, M nin alt modülü olsun. Herhangi $r \in R$ ve $m \in M$ için $rRrm \subset N$ olması $rm \in N$ olmasını gerektiriyorsa N ye **yarı asal alt modül** denir.

N alt modülü asal alt modüllerin kesişimi ise N nin yarı asal olduğu açıktır. Fakat yarı asal alt modülün asal alt modüllerin bir kesişimi olarak yazılıp yazılmadığı bir açık problemdir. Bu problemin özel bir halde ispatını yapalım.

Teorem 2.20. R bir halka ve M bir sol R-modül olsun. Eğer M radikal formülü sağlıyorsa M nin her yarı asal alt modülü asal alt modüllerin kesişimidir. Ayrıca, W($M/W(M)$)={$\bar{0}$} dır.

İspat. N, M nin yarı asal alt modülü olsun. Bu halde W(M/N)={$\bar{0}$} dır. Gerçekten, $r_1 \in R, m_1 \in M$ olmak üzere $r_1m_1 \notin N$ ise $i = 1,2,3,...$ ve $r_im_1 \notin N$ olacak şekilde $r_1m_1, r_2m_1,...$ dizisi vardır. Bu halde $r_1\,\overline{m_1}$, M/N nin kuvvetli nilpotent elemanı değildir. Varsayımımızdan $rad\left(M/N\right)$={$\bar{0}$} dır. Lemma 2.17 den N, M nin asal alt modüllerinin kesişimidir. Bunun yanında, $W(M) = rad(M)$ olması $W(M)$ nin yarı asal olması anlamına gelir. Bundan dolayı W($M/W(M)$)={$\bar{0}$}.

REFERANSLAR

[1] Chin Pi Lu, Unions of Prime Submodules, Houston Journal of Mathematics, 23(2), 1997, 203-217.

[2] Chin Pi Lu, Prime Submodules of Modules, Comm. Math. Univ. Sancti Pauli 33, 1984, 61-69.

[3] Chin Pi Lu, M-radicals of Submodules in modules, Math. Japon. 34, 1989, 211-219.

[4] Chin Pi Lu, The Zariski Topolog y On The Prime Spectrum Of a module, Houston Journal Of Mathematics, 1999.

[5] James Jenkins and Patrick F.Smith, Prime radical of a module over a commutative ring, Comm. Algebra 20(12), 1992, 3593-3602.

[6] Marion E.Moore and Sally J. Smit, Prime and Radical Submodules of Modules Over commutative rings, Communication in Algebra, Vol.30, No.10, 2002, 5037-5064.

[7] R.L. Mc Casland and P.F.Smith, Prime Submodules of Noetherian modules, Rocky Mtn. J. , 1993, 1041-1062.
[8] W.W. Smith, A covering conditions for Prime ideals, Proc. Amer. Math. Soc. 30, 1971, 451-452.
[9] J.Dauns, Prime Submodules and one-sided ideals, In Ring Theory and Algebra III, Prooceding of the third Oklahama Conference(B.R. Mc Donald), Dekker, Newyork, 1980, 301-344.
[10] Lawrence S.Levy, Modules over Hereditary Noetherian Prime Rings, International Conference on Algebra and its Application, Ohio University, 1999.
[11] Gaur, Atul; Maloo, Alok Kumar; Parkash, Anand. Prime submodules in multiplication modules. Int. J. Algebra 1, no. 5-8, 2007, 375-380.
[12] Tekir, U. A study on prime submodules. Algebras Groups Geom. 23, no. 4, 2006, 455-461.
[13] Divaani-Aazar, Kamran; Esmkhani, Mohammad Ali. Associated prime submodules of finitely generated modules. Comm. Algebra 33, no. 11, 2005, 4259-4266.
[14] Çallıalp, Fethi; Tekir, Ünsal. On unions of prime submodules. Southeast Asian Bull. Math. 28, no. 2, 2004, 213-218.
[15] Çallialp, Fethi; Tekir, Ünsal, On the prime radical of a module over a noncommutative ring. Taiwanese J. Math. 8, no. 2, 2004, 337-341.
[16] Ameri, Reza. On the prime submodules of multiplication modules. Int. J. Math. Math. Sci., no. 27, 2003, 1715-1724.
[17] Behboodi, M.; Koohy, H. On minimal prime submodules. Far East J. Math. Sci. (FJMS) 6, no. 1, 2002, 83-88.
[18] Man, Shing Hing; Smith, Patrick F. On chains of prime submodules. Israel J. Math. 127 2002, 131-155.
[19] Xiao, Min Qing; Xin, Lin. Associated prime ideals and prime submodules of the modules of generalized inverse polynomials. (Chinese) Fujian Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban 17, no. 4, 2001, 19-21, 33.
[20] Yassemi, Siamak. The dual notion of prime submodules. Arch. Math. (Brno) 37, no. 4, 2001, 273-278.
[21] Pournaki, M. R.; Tousi, M. A note on the countable union of prime submodules. Int. J. Math. Math. Sci. 27, no. 10, 2001, 641-643.
[22] Cho, Yong Hwan. On distinguished prime submodules. Commun. Korean Math. Soc. 15, no. 3, 2000, 493-498.
[23] Tiraş Yücel; Harmanci, Abdullah. On prime submodules and primary decomposition. Czechoslovak Math. J. 50(125), no. 1, 2000, 83-90.
[24] Azizi, A.; Sharif, H. On prime submodules. Honam Math. J. 21, no. 1, 1999, 1-12.
[25] Marcelo, Agustín; Muñoz Masqué, J. Prime submodules, the descent invariant, and modules of finite length. J. Algebra 189, no. 2, 1997, 273-293.
[26] Keskin, D.; Özcan, A. Ç.; Tiras, Y. On prime submodules. Far East J. Math. Sci. 4, no. 2, 1996, 163-168.
[27] McCasland, R. L.; Smith, P. F. Prime submodules of Noetherian modules. Rocky Mountain J. Math. 23, no. 3, 1993, 1041-1062.
[28] McCasland, R. L.; Moore, M. E. Prime submodules. Comm. Algebra 20, no. 6, 1992, 1803-1817.